Universidad de Puerto Rico
Recinto de Mayagüez
Colegio de Artes y Ciencias
Departamento de Ciencias Matemáticas
MATE 4052 – TAREA 5 – *Entregar:* Marzo 29, 2017

Apellidos: ______________________ Nombre: ______________________
Estudiante: ______________________ Profesor: *Dr. Alejandro Vélez-Santiago*

Instrucciones: **Para obtener crédito total, muestre todo su trabajo. No se obtendrá crédito por meras respuestas sin justificación. Puede usar y aplicar cualquier resultado discutido en clase, ó demostrado en el libro de texto (excepto si se le indica lo contrario). La tarea tiene un valor total de 54 puntos (4 puntos de bono).**

1. *(3 puntos)* Sean $a, b \in [0, \infty)$, sea $p \in (1, \infty)$, y sea $p' := p(p-1)^{-1}$ el conjugado de p. Demuestre que

$$ab \le \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}.$$

2. *(6 puntos)* Dado que $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, y $p \in [1, \infty]$, definimos:

$$\|f\|_q := \left(\int_a^b |f|^q\,dx\right)^{1/q}, \text{ si } q \in [1,\infty), \qquad \|f\|_\infty := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

(a) Pruebe que $\|\cdot\|_p$ es una norma en $\mathcal{R}[a,b]$ para todo $p \in [1,\infty]$.

(b) Demuestre que $\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_{p'}$ (si $p = \infty$, ponemos $p' = 1$).

3. *(9 puntos)* Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in (-\pi, \pi]$.

(a) Demuestre que $(\cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x))^\alpha = \cos(\alpha x) + i\,\mathrm{sen}(\alpha x)$.

(b) Pruebe que en general, la condición $x \in (-\pi,\pi]$ es necesaria en la parte (a).

(c) Si $\alpha \in \mathbb{Z}$, demuestre que la parte (a) es válida para todo $x \in \mathbb{R}$.

4. *(4 puntos)* Si $f \in \mathcal{R}[-\pi,\pi]$ es una función periódica con periodo 2π, demuestre que existe $g \in C[-\pi,\pi]$ función periódica con periodo 2π, tal que

$$\|f - g\|_2 < \epsilon, \qquad \forall\, \epsilon > 0.$$

.

5. *(8 puntos)* Sea $g(x) := (\pi - |x|)^2$ sobre $[-\pi, \pi]$.

   (a) Demuestre que
$$g(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\cos(nx)}{n^2}.$$

   (b) Use la parte (a) y la identidad de Parseval para probar que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

6. *(4 puntos)* Sea $f \in C(\mathbb{R})$ una función periódica con periodo 2π, y sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\pi/\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Demuestre que
$$\lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} f(x + k\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

   [`Hint: considera primero el caso` $f(x) = e^{ikx}$]

7. *(4 puntos)* Definimos la sucesión $\{b_n\}$ por
$$b_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\, dt.$$

Demuestre que existe una constante $C > 0$ tal que
$$b_n \;>\; C \,\log(n), \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

8. *(6 puntos)* Sea $g \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ función periódica con periodo 2π.

   (a) Si g es función par sobre $(0, \pi)$, demuestre que
$$g(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx), \qquad \text{donde } a_n := \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt)\, dt.$$

   (b) Si g es función impar sobre $(0, \pi)$, pruebe que
$$g(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen}(kx), \qquad \text{donde } b_n := \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \operatorname{sen}(nt)\, dt.$$

9. *(6 puntos)* Sea f función periódica con periodo 2π, definida por:

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < x < \pi; \\ -1, & \text{si } -\pi < x < 0; \\ 0, & \text{si } x = 0, \text{ ó } x = \pi. \end{cases}$$

Demuestre que

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left((2k-1)x\right)}{2k-1} \qquad \text{y} \qquad s_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\operatorname{sen}(2nt)}{\operatorname{sen}(t)}\, dt, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

(aquí $s_n(x)$ representa la suma parcial de la serie que representa a $f(x)$)

10. *(4 puntos)* Si $\alpha > 0$ y $x \in (-1, 1)$, pruebe que

$$(1-x)^{-\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\alpha)}{k!\,\Gamma(\alpha)}\, x^k.$$