**Universidad de Puerto Rico**
**Recinto de Mayagüez**
**Colegio de Artes y Ciencias**
**Departamento de Ciencias Matemáticas**
**MATE 4051 – TAREA 5 – *Entregar:* Noviembre 28, 2016**

Apellidos: ______________________ Nombre: ______________________
# Estudiante: ______________________ Profesor: *Dr. Alejandro Vélez-Santiago*

***Instrucciones:*** **Para obtener crédito total, muestre todo su trabajo. No se obtendrá crédito por meras respuestas sin justificación. Puede usar y aplicar cualquier resultado discutido en clase, ó demostrado en el libro de texto (excepto si se le indica lo contrario). La tarea tiene un valor total de 54 puntos (4 puntos de bono).**

1. *(4 puntos)* Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$, tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}$. Pruebe que $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$.

2. *(4 puntos)* Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, y sea $g : S \to \mathbb{R}$ función continua en $S$. Si $g(a) > 0$ para algún $a \in S$, demuestre que existe $r > 0$ tal que $g(x) > 0$ para todo $x \in U_r(a)$.

3. *(6 puntos)* Sea $f$ una función continua en el conjunto cerrado $F \subseteq \mathbb{R}$, y definamos

$$E := \{x \in F \mid f(x) = 0\}.$$

Pruebe que $E$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$.

4. *(10 puntos)* Dado $g : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$, demuestre que $g$ es continua en $X$ si y solamente si $g(\overline{E}) \subseteq \overline{g(E)}$ para todo $E \subseteq X$. Si en adición $g$ es un *mapa cerrado*, esto es, si $g(F)$ es cerrado en $Y$ para cada $F \subseteq X$ cerrado, entonces pruebe que $g$ es continua en $X$ si y solamente si $g(\overline{E}) = \overline{g(E)}$ para todo $E \subseteq X$.

5. *(8 puntos)* Sea $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ uniformemente continua, y sea $\{x_n\} \subseteq X$ sucesión de Cauchy. Demuestre que $\{f(x_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en $Y$. Luego, provea un ejemplo de una función continua $g$ y una sucesión de Cauchy $\{y_n\}$ en algún espacio métrico $(Z, d_Z)$, tal que $\{g(y_n)\}$ no es una sucesión de Cauchy.

6. *(8 puntos)* Sean $f$, $g : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ funciones continuas, y sea $E \subseteq X$ denso en $X$. Demuestre que $f(E)$ es denso en $f(X)$. Luego, si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in E$, pruebe que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$.

7. *(6 puntos)* Dados $(X, d)$, $E \subseteq X$ subconjunto compacto, $f : E \to \mathbb{R}$ función, definimos el *grafo de* $f$ por:

$$G_f := \{(x, f(x)) \mid x \in E\}.$$

Demuestre que $f$ es continua en $E$ si y solo si $G_f$ es compacto.

8. *(8 puntos)* Una función $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ es llamada *Hölder continua de exponente* $\alpha$ (en $X$), si existe constantes $\eta > 0$, $\alpha > 0$ tal que $d_Y(f(x), f(y)) \leq \eta\, d_X(x, y)^\alpha$ para todo $x$, $y \in X$. Más aún, si $f$ es Hölder continua para exponente $\alpha = 1$, entonces decimos que $f$ es *Lipschitz continua*.

(a) Pruebe que si $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ es Hölder continua de exponente $\alpha > 0$, entonces $f$ es uniformemente continua en $X$.

(b) Dado $E \subseteq X$, $E \neq \emptyset$, definimos la *distancia de* $x \in X$ *a* $E$ por:

$$d(x; E) := \inf\{d_X(x, z) \mid z \in E\}.$$

Si $\varphi_E(x) := d(x; E)$, demuestre que $\varphi_E$ es Lipschitz continua en $X$.