Universidad de Puerto Rico
Recinto de Mayagüez
Colegio de Artes y Ciencias
Departamento de Ciencias Matemáticas
MATE 4052 – TAREA 4 – *Entregar:* Marzo 22, 2017

Apellidos: ______________________ Nombre: ______________________
Estudiante: ______________________ Profesor: *Dr. Alejandro Vélez-Santiago*

<u>Instrucciones</u>: **Para obtener crédito total, muestre todo su trabajo. No se obtendrá crédito por meras respuestas sin justificación. Puede usar y aplicar cualquier resultado discutido en clase, ó demostrado en el libro de texto (excepto si se le indica lo contrario). La tarea tiene un valor total de 65 puntos (5 puntos de bono).**

1. *(6 puntos)* Supongamos que la serie $\sum c_k z^k$ tiene radio de convergencia 2, y sea $m \in \mathbb{N}$ fijo. Determine el radio de convergencia para $\sum c_k^m z^k$, y para $\sum c_k z^{k^2}$. Justifica completamente cada respuesta.

2. *(5 puntos)* Sea $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ una función analítica sobre un intervalo I, y supongamos que existen constantes α, β, tales que la ecuación

$$c_{n+1} + \alpha c_n + \beta c_{n-1} = 0$$

se cumple para cada $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que

$$f(x) = \frac{c_0 + (c_1 + c_0\alpha)x}{1 + \alpha x + \beta x^2}, \qquad \forall\, x \in I.$$

3. *(9 puntos)* Definamos

$$g(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{si } x \neq 0; \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(a) Demuestre que $g^{(n)}(0)$ existe para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Pruebe que la serie de Taylor de g alrededor de $x = 0$ converge sobre todo $\mathbb{R}$.

(c) Si $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k$, demuestre que $x = 0$.

4. *(8 puntos)* Dada $\{c_n\}$ una sucesión no negativa de números reales, definimos

$$\Psi(x) := \left(\sum c_k x^k\right)^{-1}.$$

(a) Si $\sum c_k$ diverge, pruebe que $\lim\limits_{x \to 1^-} \Psi(x) = 0$.

(b) Si $\lim\limits_{x \to 1^-} \Psi(x) = \gamma > 0$, demuestre que $\sum c_k = \frac{1}{\gamma}$ (en particular $\sum c_k$ converge).

5. *(5 puntos)* Sea $\{a_{ij}\}$ una doble sucesión de números reales. Si $a_{ij} \leq 0$ para todo i, $j \in \mathbb{N}$, pruebe que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.$$

6. *(6 puntos)* Definimos la doble sucesión $\{b_{ij}\}$ como sigue:

$$b_{ij} := \begin{cases} 0, & \text{si } i < j; \\ -1, & \text{si } i = j; \\ 2^{j-i}, & \text{si } i > j. \end{cases}$$

Calcule $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij}$ y $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} b_{ij}$.

7. *(4 puntos)* Use la definición de la función exponencial para demostrar que

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

8. *(6 puntos)* Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua, tal que $f(x+y) = f(x)f(y)$ para todo x, $y \in \mathbb{R}$, demuestre que existe una constante $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^{\lambda x}$.

9. *(4 puntos)* Si $x \in (0, \pi/2)$, demuestre que $\frac{2x}{\pi} < \operatorname{sen}(x) < x$.

10. *(6 puntos)* Si $x \in \mathbb{R}$, pruebe que $|\operatorname{sen}(nx)| \leq n|\operatorname{sen}(x)|$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$. ¿Será este resultado cierto para $n \in \mathbb{Q}^+$? Pruebe, ó provea un contraejemplo.

11. *(6 puntos)* Supongamos que $g \in \mathcal{R}[0, b]$ para todo $b \in [0, \infty)$, y supongamos que $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 1$. Demuestre que

$$\lim_{t \to 0^+} t \int_0^{\infty} e^{-tx} g(x)\, dx = 1.$$