

Universidad de Puerto Rico
 Recinto de Mayagüez
 Colegio de Artes y Ciencias
 Departamento de Ciencias Matemáticas
 MATE 4051 – TAREA 3 – **Entregar: Septiembre 30, 2016**

Apellidos: _____ Nombre: _____
 # Estudiante: _____ Profesor: Dr. Alejandro Vélez-Santiago

Instrucciones: Para obtener crédito total, muestre todo su trabajo. No se obtendrá crédito por meras respuestas sin justificación. Puede usar y aplicar cualquier resultado discutido en clase, ó demostrado en el libro de texto (excepto si se le indica lo contrario). La tarea tiene un valor total de 75 puntos (5 puntos de bono).

1. (5 puntos) Demuestre que los únicos subconjuntos de \mathbb{R} que son abiertos y cerrados son \emptyset y \mathbb{R} .

2. (12 puntos) Para $x, y \in \mathbb{R}$, definamos:

$$\begin{aligned}
 d_1(x, y) &:= (x - y)^2; & d_2(x, y) &:= \sqrt{|x - y|}; \\
 d_3(x, y) &:= |x - 2y|; & d_4(x, y) &:= |x^2 - y^2|.
 \end{aligned}$$

Determine cuáles de estos definen métricas en \mathbb{R} . Justifique completamente cada respuesta.

3. (5 puntos) Sea (X, d) es un espacio métrico, y definamos

$$d^*(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad \forall x, y \in X.$$

Pruebe que (X, d^*) es un espacio métrico, y que $d^* : X \times X \rightarrow [0, 1)$.

4. (4 puntos c.u.) Dado (X, d) espacio métrico, y $E \subseteq X$, definamos:

$$E^\circ := \{x \in E \mid x \text{ punto interior}\}, \quad E' := \{x \in X \mid x \text{ punto límite de } E\}.$$

(a) Demuestre que E° es abierto (no puede usar parte (d)).

(b) Pruebe que E es abierto si y sólo si $E^\circ = E$.

(c) Si G es abierto y $G \subseteq E$, demuestre que $G \subseteq E^\circ$.

(d) Pruebe que $(E^\circ)^c = \overline{E^c}$.

(e) ¿Será cierto que $E^\circ = (\overline{E})^\circ$? Pruebe ó provea un contraejemplo.

- (f) ¿Será cierto que $\overline{E} = \overline{E^\circ}$? Pruebe ó provea un contraejemplo.
- (g) Si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo, demuestre que E° y \overline{E} son convexos.
- (h) Pruebe que E' es cerrado.
- (i) Demuestre que $(\overline{E})' = E'$.
- (j) ¿Será cierto que $(E')' = E'$? Pruebe ó provea un contraejemplo.

5. (4 puntos) Demuestre que el intervalo $(0, 1)$ no es compacto de forma directa, esto es, encuentre una cubierta abierta de $(0, 1)$ que no posee una subcubierta finita.

6. (5 puntos) Sean K_1, K_2, \dots, K_n subconjuntos compactos del espacio métrico (X, d) . Pruebe que $K := \bigcup_{j=1}^n K_j$ es compacto.

7. (4 puntos) Dado que $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ con $a < b$, definamos el conjunto:

$$S := \{x \in \mathbb{Q} \mid a < x < b\}.$$

Demuestre que $S \subseteq \mathbb{Q}$ es cerrado y acotado (en \mathbb{Q}), pero no compacto (en \mathbb{Q}).