Universidad de Puerto Rico
Recinto de Mayagüez
Colegio de Artes y Ciencias
Departamento de Ciencias Matemáticas
MATE 4052 – TAREA 2 – *Entregar:* Febrero 8, 2017

Apellidos: ____________________ Nombre: ____________________
Estudiante: ____________________ Profesor: *Dr. Alejandro Vélez-Santiago*

Instrucciones: **Para obtener crédito total, muestre todo su trabajo. No se obtendrá crédito por meras respuestas sin justificación. Puede usar y aplicar cualquier resultado discutido en clase, ó demostrado en el libro de texto (excepto si se le indica lo contrario). La tarea tiene un valor total de 43 puntos (3 puntos de bono).**

1. *(5 puntos)* Sean $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ sucesiones de funciones real-valuadas sobre E. Supongamos que $\{g_n\}$ es decreciente y uniformemente acotada (sobre E). Si $\sum f_n$ converge uniformemente sobre E, demuestre que $\sum f_n g_n$ es uniformemente convergente.

2. *(8 puntos)* Para cada $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, definimos:

$$f_n(x) := \frac{x}{1 + nx^2}\,.$$

Pruebe que $f_n \xrightarrow{u} f$. Luego, demuestre que la ecuación $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$ es válida para todo $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, pero falsa en $x = 0$.

3. *(5 puntos)* Dado (X, d) compacto, sea $\{f_n\}$ una sucesiones de funciones real-valuadas sobre X, tal que $x_n \to x$ (en X) implica que $f_n(x_n) \to f(x)$ sobre $\mathbb{R}$. Si $f \in C(X)$, pruebe que $f_n \xrightarrow{u} f$ (sobre X).

4. *(5 puntos)* Sea $\{f_n\}$ una sucesiones de funciones real-valuadas sobre $[a, b]$, con $f_n \in C([a, b])$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Sean $\{a_n\}, \{b_n\} \subseteq [a, b]$ sucesiones con $a_n \to a$ y $b_n \to b$. Si $f_n \xrightarrow{u} f$ sobre $[a, b]$, demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

5. *(5 puntos)* Sea $\{g_n\}$ una sucesiones de funciones real-valuadas sobre $[a, b]$, tal que $g_n \to g$ puntualmente sobre $[a, b]$. Si $g \in C([a, b])$, pruebe que $g_n \xrightarrow{u} g$ (sobre $[a, b]$).

6. *(5 puntos)* Sea $\{f_n\}$ una sucesión uniformemente acotada de funciones real-valuadas sobre $[a,b]$, con $f_n \in \mathcal{R}[a,b]$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Definimos la sucesión $\{\phi_n\}$ de funciones (sobre $[a,b]$), por:

$$\phi_n(x) := \int_a^x f_n(t)\,dt.$$

Demuestre que $\{\phi_n\}$ contiene una subsucesión uniformemente convergente sobre $[a,b]$.

7. *(5 puntos)* Sea $E := \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Dado $h : E \to \mathbb{R}$, definimos el *Integral de Slobbovian* por:

$$\mathfrak{S}(h) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{n}\right) \qquad \text{(si tal límite existe).}$$

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones real-valuadas, tales que $\mathfrak{S}(f_n)$ existe para cada $n \in \mathbb{N}$. Si $f_n \xrightarrow{u} f$ (sobre E), demuestre que los siguientes se cumplen:

(a) $\{\mathfrak{S}(f_n)\}$ es una sucesión convergente.

(b) $\{\mathfrak{S}(f)\}$ existe.

(c) $\mathfrak{S}(f_n) \to \mathfrak{S}(f)$.

8. *(5 puntos)* Dada $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ función continua, definamos la sucesión $\{f_n\}$ de funciones continuas (sobre $[0,\infty)$) por: $f_n(x) := f(x^n)$. Demuestre que la familia $\mathcal{F} := \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es equicontinua en $x = 1$ si y solo si f es una función constante.