Universidad de Puerto Rico
Recinto de Mayagüez
Colegio de Artes y Ciencias
Departamento de Ciencias Matemáticas
MATE 4051 – TAREA 1 – *Entregar:* Septiembre 2, 2016

Apellidos: ______________________ Nombre: ______________________
Estudiante: ______________________ Profesor: *Dr. Alejandro Vélez-Santiago*

Instrucciones: **Para obtener crédito total, muestre todo su trabajo. No se obtendrá crédito por meras respuestas sin justificación. La tarea tiene un valor total de 40 puntos.**

1. *(4 puntos)* Demuestre que $\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}$ es un número irracional, para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. *(4 puntos)* Sean A, $B \subseteq \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ dos conjuntos acotados superiormente, y sean $\alpha := \sup(A)$, $\beta := \sup(B)$. Sea $C := \{xy \mid x \in A,\ y \in B\}$. Pruebe que C está acotado superiormente, y que $\sup(C) = \alpha\beta$.

3. *(4 puntos)* Sea $\mathcal{P} := \{p \text{ número primo}\}$. Demuestre que $\mathcal{P}$ no está acotado superiormente.

4. *(4 puntos)* Sea $S \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto acotado superiormente, y sea k una cota superior para S. Si $k \in S$, pruebe que $k = \sup(S)$.

5. *(3 puntos c.u.)* Sea $b > 1$ un número real fijo.

   (a) Sean m, $p \in \mathbb{Z}$, n, $q \in \mathbb{N}$. Si $r = m/n = p/q$, pruebe que

   $$(b^m)^{1/n} = (b^p)^{1/q}.$$

   Entonces hace sentido definir $b^r = (b^m)^{1/n}$.

   (b) Demuestre que $b^{r+s} = b^r b^s$ para cada r, $s \in \mathbb{Q}$.

   (c) Dado $x \in \mathbb{R}$, definimos

   $$K_x := \{b^t \mid t \in \mathbb{Q},\ t < x\}.$$

   Demuestre que si $r \in \mathbb{Q}$, entonces $b^r = \sup(K_r)$. Luego, definimos $b^x = \sup(K_x)$.

   (d) Pruebe que $b^{x+y} = b^x b^y$ para todo x, $y \in \mathbb{R}$.

6. *(4 puntos)* Sea $S = \{0, 1\}$. Defina operaciones "$+$" y "$\cdot$" tales que $(S, +, \cdot)$ sea un cuerpo ordenado bajo el orden parcial "$<$". Justifique completamente su selección, verificando los axiomas y propiedades.

7. *(4 puntos)* Si $x, y \in \mathbb{C}$, pruebe que $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

8. *(4 puntos)* Sea $z \in \mathbb{C}$, tal que $|z| = 1$. Calcule el valor de $|1 + z|^2 + |1 - z|^2$. Justifique completamente su respuesta.