Universidad de Puerto Rico
Recinto de Mayagüez
Colegio de Artes y Ciencias
Departamento de Ciencias Matemáticas
MATE 4051 – EXAMEN 3 – *Fecha:* Noviembre 30, 2016

Instrucciones: **Resuelva exactamente tres de los cinco siguientes problemas. Para obtener crédito total, muestre todo su trabajo. No se obtendrá crédito por meras respuestas sin justificación. Puede usar y aplicar cualquier resultado discutido en clase, ó demostrado en el libro de texto (excepto si se le indica lo contrario). El examen tiene un valor total de 54 puntos (4 puntos de bono).**

1. (a) *(3 puntos)* Defina *la derivada* en de una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ en $x_0 \in (a, b)$.

(b) *(9 puntos)* Sea $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ función continua. Si X es compacto, demuestre que $f(X)$ es compacto.

(c) *(6 puntos)* Una función $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ es llamada *Hölder continua de exponente* α (en X), si existen constantes $\eta > 0$, $\alpha > 0$ tales que $d_Y(f(x), f(y)) \leq \eta\, d_X(x, y)^\alpha$ para todo x, $y \in X$. Luego, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es Hölder continua de exponente $\alpha > 1$, pruebe que f es la función constante.

2. (a) *(3 puntos)* Defina una *función acotada* $f : (X, d_X) \to \mathbb{R}$.

(b) *(9 puntos)* Sea $g : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ función continua. Si X es compacto, demuestre que g es uniformemente continua en X.

(c) *(6 puntos)* Decimos que t es un *punto fijo* de una función f, si $f(t) = t$. Luego, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, tal que $f'(x) \neq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, pruebe que f tiene a lo más un punto fijo.

3. (a) *(3 puntos)* Enuncie el *Teorema del Valor Medio* para una función $g : [a, b] \to \mathbb{R}$.

(b) *(9 puntos)* Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ función diferenciable en $[a, b]$, tal que $f'(a) < \lambda < f'(b)$ para algún numero real λ. Pruebe que existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = \lambda$.

(c) *(6 puntos)* Dado $E \subseteq X$, $E \neq \emptyset$, definimos la *distancia de* $x \in X$ *a* E por:

$$d(x; E) := \inf\{d_X(x, z) \mid z \in E\}.$$

Si $\varphi_E(x) := d(x; E)$, demuestre que φ_E es Lipschitz continua en X (esto es, φ_E es Hölder continua de exponente $\alpha = 1$).

4. (a) *(3 puntos)* Defina una *función uniformemente continua* $g : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$.

(b) *(9 puntos)* Sean $f,\ g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a, b]$, y diferenciables en (a, b). Demuestre que existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $[f(b) - f(a)]g'(x_0) = [g(b) - g(a)]f'(x_0)$.

(c) *(6 puntos)* Dado $E \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto acotado, sea $h : E \to \mathbb{R}$ una función uniformemente continua. Demuestre que h es una función acotada en E.

5. (a) *(3 puntos)* Defina un *máximo local* de una función $f : (X, d) \to \mathbb{R}$.

(b) *(9 puntos)* Dado $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, supongamos que $f^{(n-1)}$ es continua en $[a, b]$, y que $f^{(n)}(t)$ existe para cada $t \in (a, b)$. Dados $\alpha,\ \beta \in [a, b],\ \alpha \neq \beta$, definimos

$$P_n(t) := {}_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(t - \alpha)^k \,.$$

Demuestre que existe un número x_0 entre α y β, tal que

$$f(\beta) = P_n(\beta) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\beta - \alpha)^n \,.$$

(c) *(6 puntos)* Una función $g : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ es llamada *función abierta*, si $g(U) \subseteq Y$ es abierto, para cada $U \subseteq X$ abierto. Luego, pruebe que toda función abierta $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es monotónica.