Universidad de Puerto Rico
Recinto de Mayagüez
Colegio de Artes y Ciencias
Departamento de Ciencias Matemáticas
MATE 4051 – EXAMEN 2 – *Fecha:* Noviembre 9, 2016

Instrucciones: **Resuelva exactamente tres de los cinco siguientes problemas. Para obtener crédito total, muestre todo su trabajo. No se obtendrá crédito por meras respuestas sin justificación. Puede usar y aplicar cualquier resultado discutido en clase, ó demostrado en el libro de texto (excepto si se le indica lo contrario). El examen tiene un valor total de 54 puntos (4 puntos de bono).**

1. (a) *(3 puntos)* Defina una *sucesión de Cauchy* en (X, d).

(b) *(9 puntos)* Demuestre que todo conjunto perfecto en $\mathbb{R}^n$ es incontable.

(c) *(6 puntos)* Suponga que $\sum a_k$ converge, y sea $\{b_n\}$ sucesión monotónica y acotada de números reales. Pruebe que $\sum a_k b_k$ converge.

2. (a) *(3 puntos)* Defina un *conjunto conexo.*

(b) *(9 puntos)* Dado (X, d) y $E \subseteq X$, pruebe que x es un punto límite de E si y solamente si existe una sucesión $\{x_n\} \subseteq E$ tal que $x_n \to x$.

(c) *(6 puntos)* Si $\sum a_k^2$ converge, demuestre que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k}$ converge absolutamente.

3. (a) *(3 puntos)* Provea un ejemplo de una serie convergente que no es serie absolutamente convergente.

(b) *(9 puntos)* Si X es un espacio métrico compacto, demuestre que X es un espacio completo.

(c) *(6 puntos)* Para todo $p \in \mathbb{R}$, demuestre que $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}\,[\log(k)]^p}$ diverge.

4. (a) *(3 puntos)* Para la sucesión $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$, defina el *límite inferior* de $\{x_n\}$.

(b) *(9 puntos)* Pruebe que la serie $\sum a_k$ converge absolutamente si $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, y diverge si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ para todo $n \geq N_0$, para algún $N_0 \in \mathbb{N}$ fijo.

(c) *(6 puntos)* Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales, y defina: $y_n := \frac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j$. Si $x_n \to x$, pruebe que $y_n \to x$.

5. (a) *(3 puntos)* Defina un *espacio métrico completo.*

(b) *(9 puntos)* Si $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente de números reales positivos, demuestre que $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ converge si y solamente si $a_n \to 0$.

(c) *(6 puntos)* Si $E \subseteq \mathbb{R}$ es conexo, pruebe que E es un intervalo en $\mathbb{R}$.