**Universidad de Puerto Rico**
**Recinto de Mayagüez**
**Colegio de Artes y Ciencias**
**Departamento de Ciencias Matemáticas**
**MATE 4051 – EXAMEN 1 – *Fecha:* Octubre 5, 2016**

***Instrucciones:*** **Resuelva exactamente tres de los cinco siguientes problemas. Para obtener crédito total, muestre todo su trabajo. No se obtendrá crédito por meras respuestas sin justificación. Puede usar y aplicar cualquier resultado discutido en clase, ó demostrado en el libro de texto (excepto si se le indica lo contrario). El examen tiene un valor total de 54 puntos (4 puntos de bono).**

1. (a) *(3 puntos)* Defina un *conjunto contable.*

(b) *(9 puntos)* Demuestre que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$; esto es, demuestre que para todo $a$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, existe $c \in \mathbb{Q}$ tal que $a < c < b$.

(c) *(6 puntos)* Si $\{K_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una colección de subconjuntos compactos de $(X, d)$, pruebe que $K := \bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha$ es compacto.

2. (a) *(3 puntos)* Defina la *cota superior mínima* de un conjunto ordenado $(S, \leq)$.

(b) *(9 puntos)* Sea $\mathcal{P}(A)$ el conjunto potencia de un conjunto $A$. Demuestre que $A \nsim \mathcal{P}(A)$.

(c) *(6 puntos)* Dados $a$, $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ con $a < b$, sea $S := (a, b) \cap \mathbb{Q}$. Pruebe que $S$ es cerrado y abierto en $\mathbb{Q}$.

3. (a) *(3 puntos)* Defina un *conjunto compacto.*

(b) *(9 puntos)* Dado $(X, d)$, sea $E \subseteq X$. Pruebe que la clausura $\overline{E}$ es cerrada en $X$, y demuestre que $E$ es cerrado si y solamente si $\overline{E} = E$.

(c) *(6 puntos)* Demuestre que $\mathbb{Q}$ es un conjunto contable.

4. (a) *(3 puntos)* Defina un *punto límite* de un conjunto $E$.

(b) *(9 puntos)* Dado $(X, d)$, sea $K \subseteq X$ compacto, y sea $F \subseteq K$ cerrado. Pruebe que $F$ es compacto.

(c) *(6 puntos)* Si $A$ y $B$ son dos conjuntos contables, demuestre que $A \times B$ es contable.

5. (a) *(3 puntos)* Defina un *subconjunto perfecto* de un espacio métrico $(X, d)$.

(b) *(9 puntos)* Dado $(X, d)$, sea $K \subseteq X$ compacto, y sea $E \subseteq K$ infinito. Demuestre que $E$ tiene un punto límte en $K$.

(c) *(6 puntos)* Dado $(X, d)$ espacio métrico, y $E \subseteq X$, definimos $E' := \{x \in X \mid x \text{ punto límite de } E\}$. ¿Será cierto que $E' \subseteq (E')'$? ¿Será cierto que $(E')' \subseteq E'$? Para cada inclusión, demuestre (de ser cierto), ó provea un contraejemplo (de ser falso en general).