7. INFERENCIA ESTADÍSTICA

Dr. Edgar Acuña

http://math.uprm.edu/~edgar

UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO

RECINTO UNIVERSITARIO DE MAYAGUEZ

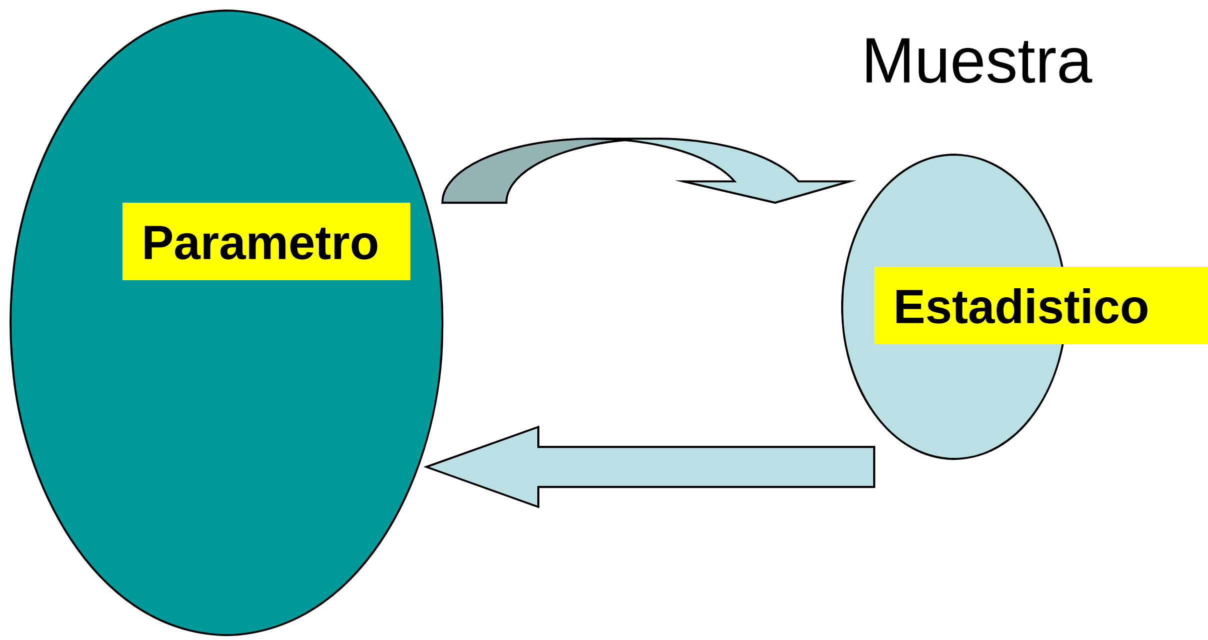
INFERENCIA ESTADÍSTICA

La Inferencia Estadística comprende los métodos que son usados para obtener conclusiones de la población en base a una muestra tomada de ella. Incluye los **métodos de estimación de parámetros** y **las pruebas de hipótesis**.

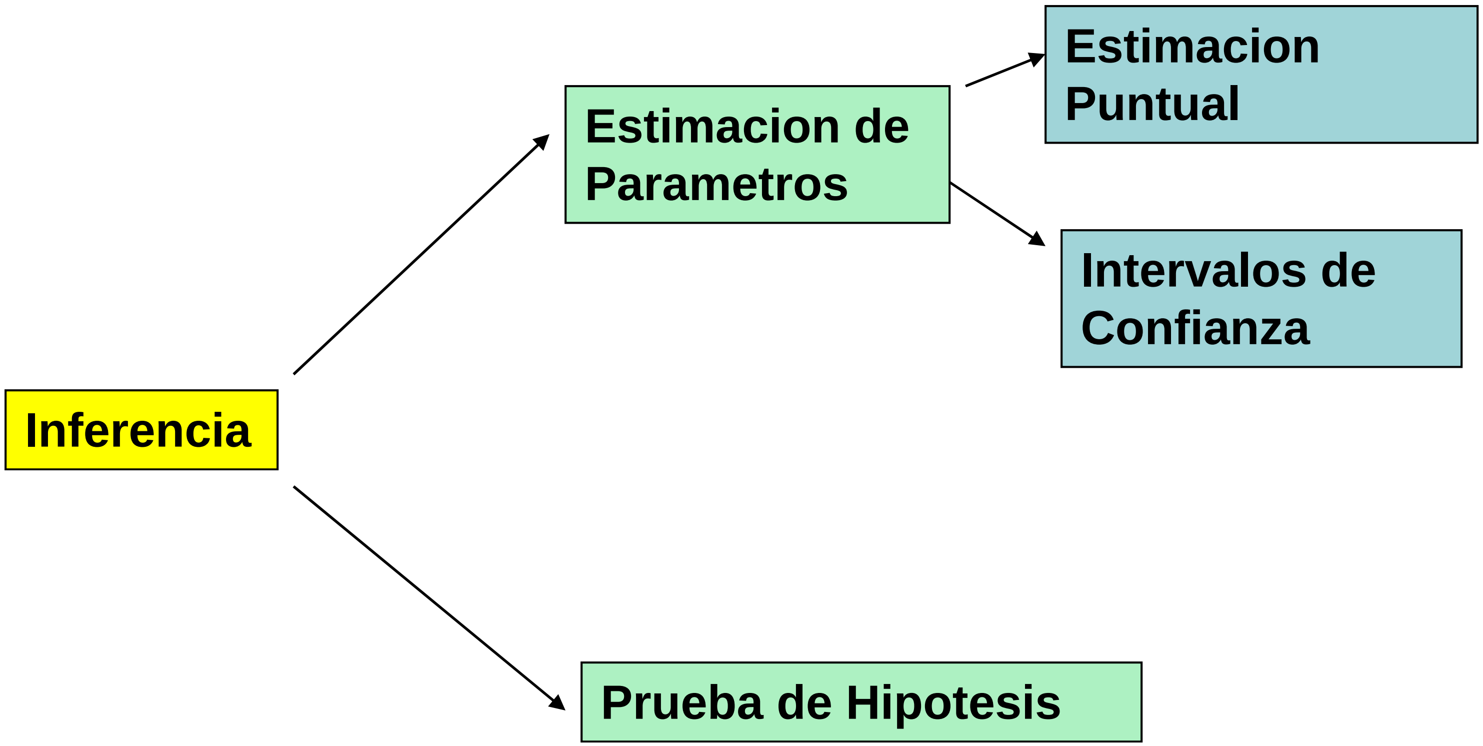
La Estimación de parámetros comprende a su vez la Estimación Puntual, en donde se estudian los diversos métodos de encontrar estimadores y las propiedades óptimas que deben tener éstos, y la Estimación por Intervalos de Confianza, en donde se estima un parámetro usando un intervalo centrado en un estimado del parámetro y de longitud igual a dos veces el error de estimación.

Inferencia Estadistica

Poblacion



Inferencia estadistica



Hipótesis Estadística

Una **Hipótesis Estadística** es una afirmación que se hace acerca de un parámetro poblacional. Por ejemplo, el tiempo de vida promedio para una persona diagnosticada con cáncer de pulmón es 180 días.

hipótesis nula, La afirmación que está establecida y que se espera sea rechazada después de aplicar una **prueba estadística** es llamada la ***hipótesis nula*** y se representa por *Ho*.

hipótesis alterna La afirmación que se espera sea aceptada después de aplicar una **prueba estadística** es llamada la ***hipótesis alterna*** y se representa por *Ha*.

Hipótesis Estadística (cont)

Una **prueba estadística** es una fórmula, basada en la distribución del estimador del parámetro que aparece en la hipótesis y que va a permitir tomar una decisión acerca de aceptar o rechazar una hipótesis nula.

La prueba estadistica no es ciento por ciento confiable y hay dos tipos de errores que se pueden cometer.

El ***error tipo I,*** se comete cuando se rechaza una hipótesis nula que realmente es cierta,

El ***error tipo II*** que se comete cuando se acepta una hipótesis nula que realmente es falsa.

Hipótesis Estadística (cont)

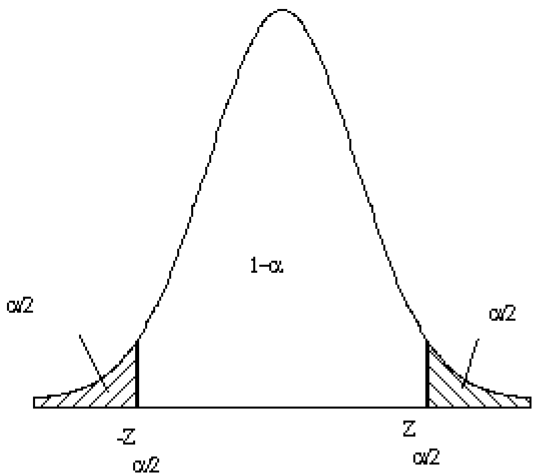
El **nivel de significación,** representada por α, es la probabilidad de cometer ***error tipo I***, y por lo general se asume que tiene un valor de .05 ó .01. También puede ser interpretado como el área de la región que contiene todos los valores posibles de la prueba estadística para los cuales la hipótesis nula es rechazada.

La probabilidad de cometer ***error tipo II***, es representado por β y al valor $1\text{-}\beta$ se le llama ***la potencia de la prueba***.

Una buena prueba estadística es aquella que tiene una potencia de prueba alta.

7.1 Inferencias acerca de la Media Poblacional (varianza conocida).

Supongamos que de una población normal con media desconocida μ y varianza conocida σ^2 se extrae una muestra de tamaño *n*, entonces de la distribución de la media muestral se obtiene que:



$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

se distribuye como una normal estándar.

Luego $P(-Z_{a/2} < Z < Z_{a/2}) = 1 - \alpha$

Donde $Z_{\alpha/2}$ es el valor de la normal estándar tal que el área a la derecha de dicho valor es $\alpha/2$.

Inferencias acerca de la Media Poblacional (varianza conocida).

Sustituyendo la fórmula de *Z*, se obtiene:

$$P(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\, \sigma/\sqrt{n} < \mu < \bar{x} + Z_{\alpha/2}\, \sigma/\sqrt{n}) = 1 - \alpha$$

Notar que los dos extremos del intervalo son aleatorios.

De lo anterior se puede concluir que un Intervalo de Confianza del 100 (1-α) % para la media poblacional μ, es de la forma:

$$\bar{x} - Z_{\alpha/2}\, \sigma/\sqrt{n} \;,\; \bar{x} + Z_{\alpha/2}\, \sigma/\sqrt{n}$$

Inferencias acerca de la Media Poblacional (varianza conocida).

La siguiente tabla muestra los $Z_{\alpha/2}$ más usados.

Nivel de Confianza	$Z_{\alpha/2}$
90	1.645
95	1.96
99	2.58

Usando **MINITAB** se pueden hallar intervalos de confianza y hacer pruebas de hipótesis para μ. Para esto se sigue la secuencia **Stat** ▸ ***Basic Statistics*** ▸ ***1-sample Z***

Inferencias acerca de la Media Poblacional (varianza conocida)

Ejemplo 7.1. Un cardiólogo desea hallar un intervalo de confianza del 90% para el nivel colesterol promedio de todos los pacientes que presentan problemas cardíacos. Para esto asume que la distribución de los niveles de colesterol es normal con una desviación estándar σ = 13 y usa la siguiente muestra al azar de niveles de colesterol de 20 pacientes con problemas cardíacos.

217	223	225	245	238	216	217	226	202
233	235	242	219	221	234	199	236	248
218	224							

Solucion: En MINITAB seguir la secuencia **Stat** ▸ ***Basic Statistics*** ▸ ***1-sample Z .*** No se escribe nada en la ventanita **perform hypothesis test**. Luego, oprimir **Options** para entrar el nivel de confianza

One-Sample Z: colesterol

The assumed standard deviation = 13

Variable	N	Mean	StDev	SE Mean	90.0 % CI
colester	20	225.90	13.09	2.91	(221.12, 230.68)

Interpretación: Hay un 90% de confianza de que el nivel de colesterol de todos los pacientes con problemas cardíacos caiga entre 221.12 y 230.68.

Inferencias acerca de la Media Poblacional (varianza conocida).

En la práctica si la media poblacional es desconocida entonces, es bien probable que la varianza también lo sea puesto que en el cálculo de σ^2 interviene μ. Si ésta es la situación, y si el tamaño de muestra es grande ($n > 30$, parece ser lo más usado), entonces σ^2 es estimada por la varianza muestral s^2 y se puede usar la siguiente fórmula para el intervalo de confianza de la media poblacional:

$$\bar{X} - z_{\alpha/2} s/\sqrt{n}, \bar{X} + z_{\alpha/2} s/\sqrt{n}$$

También se pueden hacer pruebas de hipótesis con respecto a la media poblacional μ. *Por conveniencia, en la hipótesis nula siempre se asume que la media es igual a un valor dado.*

Existen dos métodos para hacer la prueba de hipótesis: el método clásico y el método del "P-value".

En el método clásico, se evalúa la prueba estadística de Z y al valor obtenido se le llama ***Z calculado*** (*Zcalc*). *Por otro lado el nivel de significancia* α, definido de antemano determina una región de rechazo y una de aceptación. *Si Zcalc cae en la región de rechazo, entonces se concluye que hay suficiente evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula basada en los resultados de la muestra tomada.*

Formulas para prueba de hipotesis de medias

Caso I	Caso II	Caso III
$H_o : \mu = \mu_0$	$H_o : \mu = \mu_0$	$H_o : \mu = \mu_0$
$H_a : \mu < \mu_0$	$H_a : \mu \neq \mu 0$	$Ha : \mu > \mu 0$

Prueba Estadística:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_o}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Decisión:

Si $Z_{cal} < -Z_{\alpha}$ *entonces*	*Si* $\lvert Zcal \rvert > Z\alpha/2$ *entonces*	*Si* $Zcal > Z_{\alpha}$ *entonces*
se rechaza Ho	*se rechaza Ho*	*se rechaza Ho*

Prueba de hipotesis usando “p-values”

El “P-value” llamado el nivel de significación observado, es el valor de α al cual se rechazaría la hipótesis nula si se usa el valor calculado de la prueba estadística. En la práctica un “P-value” cercano a 0 indica un rechazo de la hipótesis nula. Así un “P-value” menor que .05 indicará que se rechaza la hipótesis nula.

Fórmulas para calcular “P-value”: *Depende de la forma de la hipótesis alterna*

Si Ha: $\mu > \mu_o$, entonces P-value = Prob ($Z > Zcalc$).

Si Ha: $\mu < \mu_o$, entonces P-value = Prob ($Z < Zcalc$).

Si Ha: $\mu \neq \mu_o$, entonces P-value = 2Prob ($Z > |Zcalc|$).

Los principales paquetes estadísticos, entre ellos MINITAB, dan los “P-values” para la mayoría de las pruebas estadísticas.

Ejemplo

Ejemplo 7.3. En estudios previos se ha determinado que el nivel de colesterol promedio de pacientes con problemas cardíacos es 220. Un cardiólogo piensa que en realidad el nivel es más alto y para probar su afirmación usa la muestra del Ejemplo 7.1. ¿Habrá suficiente evidencia estadística para apoyar la afirmación del cardiólogo? Justificar su contestación.

Solución:

La hipótesis nula es *Ho:* $\mu = 220$ (el nivel de colesterol promedio es 220)

La hipótesis alterna es Ha: $\mu > 220$ (el cardiólogo piensa que el nivel promedio de colesterol es mayor de 220).

Los resultados son los siguientes:

One-Sample Z: colesterol
Test of mu = 220 vs > 220
The assumed standard deviation = 13

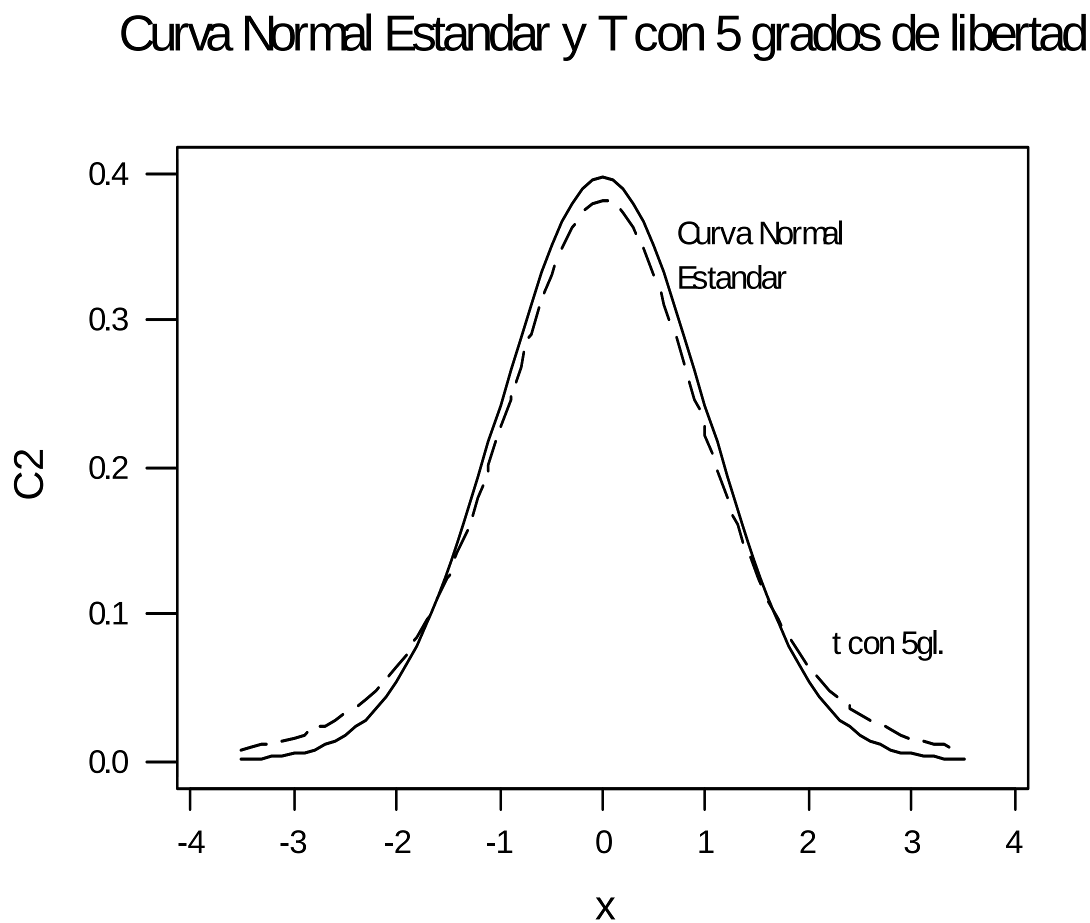
Variable	N	Mean	StDev	SE Mean	90% Lower Bound	Z	P
colesterol	20	225.900	13.094	2.907	222.175	2.03	0.021

Interpretación: *El valor del “P-value” (el área a la derecha de 2.03) es .021 menor que el nivel de significación* α*=.05, por lo tanto; se rechaza la hipótesis nula y se concluye de que sí hay evidencia estadística de que el nivel de colesterol promedio de los pacientes con problemas cardíacos es mayor de 220. O sea los resultados apoyan lo que afirma el cardiólogo. Notar que el extremo inferior del intervalo confianza de un solo lado empieza en 222.175 que es mayor que 220.*

7.2 Inferencias acerca de la Media Poblacional (Varianza Desconocida)

Supongamos que la población es normal con media y varianza desconocida y que se desea hacer inferencias acerca de μ, *basada en una muestra pequeña (n* < 30) tomada de la población. *En este caso la distribución de la media muestral* $\overline{X}$ ya no es normal, sino que sigue la distribución ***t de Student*.**

La distribución ***t de Student*** es bastante similar a la Normal Estándar, con la diferencia que se aproxima más lentamente al eje horizontal. El parámetro de esta distribución es llamado **grados de libertad**, y se puede notar que a medida que los grados de libertad aumentan, la curva de la ***t*** y la curva normal estándar se asemejan cada vez más. Por cada estimación de parámetro, calculada en forma independiente, que aparece en la formula del estadistico se pierde un grado de libertad con respecto al total de datos tomados.



Hecho por Edgar Acuna

Si de una población Normal con media μ y desviación estándar σ se extrae una muestra de tamaño n, entonces el estadístico:

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

se distribuye como una *t de Student* con *n*-1 grados de libertad.
Recordar que la desviación estándar *s* puede ser escrita en términos de $\overline{X}$

Un intervalo de confianza del 100 (1-α) % para μ *es de la forma:*

$$\overline{X} - t_{\alpha/2} s/\sqrt{n}, \overline{X} + t_{\alpha/2} s/\sqrt{n}$$

donde *s* es la desviación estándar muestral. Aquí $t_{(n-1,\alpha/2)}$ es un valor de t con n-1 grados de libertad y tal que el area a la derecha de dicho valor es α/2.
En MINITAB se sigue la secuencia **Stat** ▸ ***Basic Statistics*** ▸ ***1-sample t***

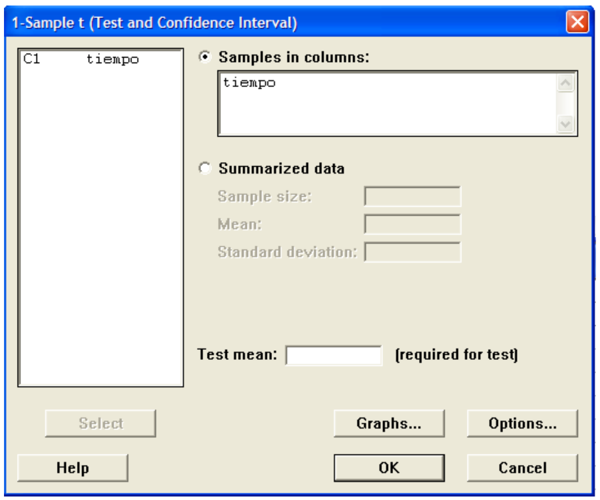
Ejemplo

Ejemplo 7.5. Los tiempos de sobrevivencia (en años) de 12 personas que se han sometido a un transplante de corazón son los siguientes:

3.1 .9 2.8 4.3 .6 1.4 5.8 9.9 6.3 10.4 0 11.5

Hallar un intervalo de confianza del 99 por ciento para el promedio de vida de todas las personas que se han sometido a un transplante de corazón.

Solución:



One-Sample T: tiempo

Variable	N	Mean	StDev	SE Mean	99% CI
tiempo	12	4.75000	4.04599	1.16798	(1.1224, 8.3775)

Con un 99% de confianza el tiempo de vida promedio de toda persona que se somete a un transplante de corazon caera entre 1.12 y 8.37 anos.

Prueba de hipotesis (varianza desconocida)

Caso I

$H_o : \mu = \mu_0$

$H_a : \mu < \mu_0$

Caso II

$H_o : \mu = \mu_0$

$H_a : \mu \neq \mu 0$

Caso III

$H_o : \mu = \mu$

$Ha : \mu > \mu 0$

Prueba Estadística

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_o}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Si $t_{cal} < -t_\alpha$ *entonces se rechaza* H_o

Si $|t_{cal}| > t_{\alpha/2}$ *entonces se rechaza* H_o

Si $t_{cal} > t_\alpha$ *entonces se rechaza* H_o

Ejemplo 7.6 Usando los datos del Ejemplo 7.5, un cardiocirujano afirma que el tiempo de vida promedio de las personas sometidas a transplante de corazón es mayor que 4 años. ¿A qué conclusión se llegará después de hacer la prueba de hipótesis?

Solución:

La hipótesis nula es *H0:* $\mu = 4$ (el tiempo de vida promedio de todas las personas que se han sometido a transplante de corazón es de 4 años) y la hipótesis alterna es *Ha:* $\mu > 4$ (el tiempo de vida promedio *es mayor que 4 años).*

One-Sample T: tiempo

Test of mu = 4 vs > 4

Variable	*N*	*Mean*	*StDev*	*SE Mean*	*99% Lower Bound*	*T*	*P*
tiempo	*12*	*4.75000*	*4.04599*	*1.16798*	*1.57535*	*0.64*	*0.267*

Interpretación: *El valor del "P-value" (el área a la derecha de 0.64) es .267 mayor que el nivel de significación* $\alpha = .05$*, por lo tanto NO se rechaza la hipótesis nula y se concluye de que no hay evidencia de que el tiempo promedio de vida después del transplante haya aumentado de 4 años. Notar que el extremo inferior del intervalo de confianza de un solo lado al 99% es 1.575 mucho menor que 4.*

7.3 Inferencia para Proporciones

Cuando estamos interesados en estimar la proporción *p* (o el porcentaje) de ocurrencia de un evento. Se necesita definir una variable aleatoria *X* que indique el número de veces que ocurre el evento en una muestra de tamaño *n* y con probabilidad de éxito, *p*. Se puede mostrar que cuando el tamaño de muestra es grande, tal que np > 5, entonces el estadístico

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

se distribuye aproximadamente como una normal estándar. Aquí *p* representa la proporción poblacional que se desea estimar, y $\hat{p} = \frac{x}{n}$ es la proporción muestral.

En **MINITAB**, se sigue la secuencia **Stat** ▸ **Basic Statistics** ▸ **1 proportion**.

Inferencia para Proporciones

Intervalo de confianza (aproximado) del 100 (1-α) % para la proporción poblacional *p* es:

$$\hat{p} - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

Pruebas de hipótesis:

Caso I	**Caso II**	**Caso III**
$Ho : p=p_0$	$Ho : p=p_0$	$Ho : p=p_0$
$Ha : p<p_0$	$Ha : p \neq p_0$	$Ha : p>p_0$

Prueba Estadística (Aproximada):

$$Z = \frac{(p - p_0)}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}$$

Decisión

Si $Zcal < -Z\alpha$ entonces se rechaza H_o	**S**i $\lvert Zcal \rvert > Z\alpha / 2$ entonces se rechaza H_o	**S**i $Zcal > Z\alpha$ entonces se rechaza H_o

Ejemplo

Ejemplo 7.7. En 1990 en un cierto país, se reportó que dos de cada 5 personas pensaban que debería incrementarse el poder nuclear. En una encuesta reciente hecha en 1996 a 1225 personas se encontró que 478 de ellos pensaban que se debería aumentar el poder nuclear. Hallar un intervalo de confianza del 90 por ciento para la proporción poblacional en 1996. ¿Piensa Ud. que hay evidencia de que la opinión de la gente en 1996 ha cambiado con respecto a 1990? Justificar su contestación.

Solución:

Hay que hallar un intervalo de confianza del 90% para la proporción *p*, y probar la siguiente hipótesis:

$H_0 : p = .4$ (la proporción no cambió de 1990 a 1996).

$H_a : p \neq .4$ (la proporción cambió de 1990 a 1996).

Ejemplo (sol.)

Test and CI for One Proportion

Test of p = 0.4 vs p not = 0.4

Sample	X	N	Sample p	90% CI	Z-Value	P-Value
1	478	1225	0.390204	(0.367280, 0.413128)	-0.70	0.484

Interpretación: Viendo que el "p-value" es .484 mucho mayor que .05 se llega a la conclusión de que no hay suficiente evidencia de que la proporción de personas a favor de un incremento del poder nuclear haya cambiado de 1990 a 1996.

Nota: Si en una columna se introduce los éxitos y fracasos entonces, MINITAB identifica el éxito (SUCCESS) y fracaso (FAILURE) según el orden alfabético, o sea fracaso es el valor de la variable que empieza con una letra que aparece antes en el alfabeto.

Ejemplo

Ejemplo 7.8. El director de un hospital afirma que el 25 por ciento de los nacimientos que ocurren allí son por cesárea. Un médico que trabaja en dicho hospital piensa que ese porcentaje es mayor. Para probar su afirmación recolecta información de los 25 nacimientos ocurridos durante una semana.

Partos

Cesárea	normal	cesárea	normal	normal	normal	normal	cesárea	normal
cesárea	normal	cesárea	normal	normal	normal	normal	normal	cesárea
normal	normal	cesárea	normal	normal	cesárea	normal		

¿Habrá suficiente evidencia estadística para apoyar la afirmación del médico?

Solución:

Los datos son entrados en una columna llamada *partos*, luego se usará la opción **samples in columns** en la ventana **1-proportion.**

será considerado éxito que el parto sea normal y fracaso, que el parto sea por cesárea.

Ejemplo (cont.)

Luego las hipótesis planteadas son:
Ho: p =.75 (el 75% de los partos son normales y el 25% por cesárea)
Ha: p <.75 (menos del 75% de los partos son normales)

Test and Confidence Interval for One Proportion
Test of p = 0.75 vs p < 0.75
Success = normal

Variable	X	N	Sample p	95.0 % CI	Z-Value	P-Value
partos	17	25	0.680000	(0.497145, 0.862855)	-0.81	0.209

Interpretación: De acuerdo al "P-value" = 0.209 > .05 no se rechaza la hipótesis nula. Por lo tanto, no hay evidencia suficiente para concluir que lo que afirma el médico es correcto.

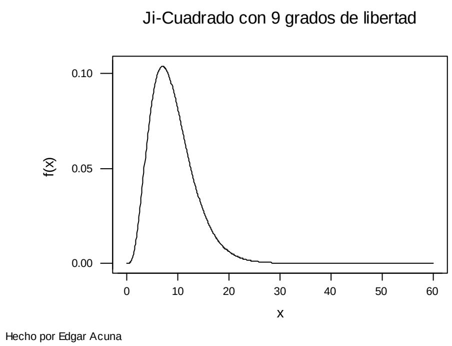
7.4 Inferencia acerca de la Varianza Poblacional.

La Distribución Ji-Cuadrado

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ observaciones de una muestra de tamaño n de una población normal N (μ,σ^2). Entonces:

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2}$$

se distribuye como una Ji-Cuadrado (χ^2) con n-1 grados de libertad. La distribución Ji-Cuadrado no es simétrica, pero a medida que los grados de libertad aumentan se va observando más simetría.



$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \qquad s^2 = \frac{\sum (X_i - \overline{X})^2}{n-1}$$

Usos de la Ji-Cuadrado

a) Para hacer inferencias acerca de la varianza poblacional.

Es decir, para calcular Intervalos de Confianza y Prueba de hipótesis para la varianza poblacional.

b) Para hacer pruebas de Bondad de Ajuste. O sea, para probar

si un conjunto de datos sigue una distribución pre-determinada.

c) Para hacer análisis de tablas de contingencia.

Intervalos de Confianza para la Varianza Poblacional

Partiendo de la siguiente relación, la cual puede ser fácilmente entendida con una gráfica:

$$P(\chi^2_{\alpha/2} < \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < \chi^2_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha$$

Se puede llegar a establecer que un intervalo de confianza del 100 (1-α) % para la varianza poblacional σ2 de una población normal es de la forma:

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}} \quad , \quad \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}} \right)$$

Donde $\chi^2_{\alpha/2}$ y $\chi^2_{1-\alpha/2}$ representan los valores de una Ji-Cuadrado con n-1 grados de libertad, de tal manera que el área a la izquierda de dichos valores son α/2 y1- α/2 respectivamente.

Ejemplo

Ejemplo 7.9 (adaptado). Los siguientes datos representan las edades que tenian al momento de morir por enfermedad de una muestra de 20 personas de un pueblo:

80 90 85 82 75 58 70 84 87
81 87 61 73 84 85 70 78
95 77 52

Hallar un intervalo de confianza del 95 % para la varianza poblacional de la edad de muerte.

Solución:

En este caso n = 20 y α = .05. Luego el intervalo de confianza del 95 % para σ^2 será de la forma:

$$\left(\frac{19\,s^2}{\chi^2_{.975}},\ \frac{19\,s^2}{\chi^2_{.025}}\right)$$

Ejemplo (Cont.)

En MINITAB, seguir la secuencia **Stat** ▸ **Basic Statistics** ▸ **1 Variance**

Test and CI for One Variance: Edad

Method

The standard method is only for the normal distribution.

The adjusted method is for any continuous distribution.

Statistics

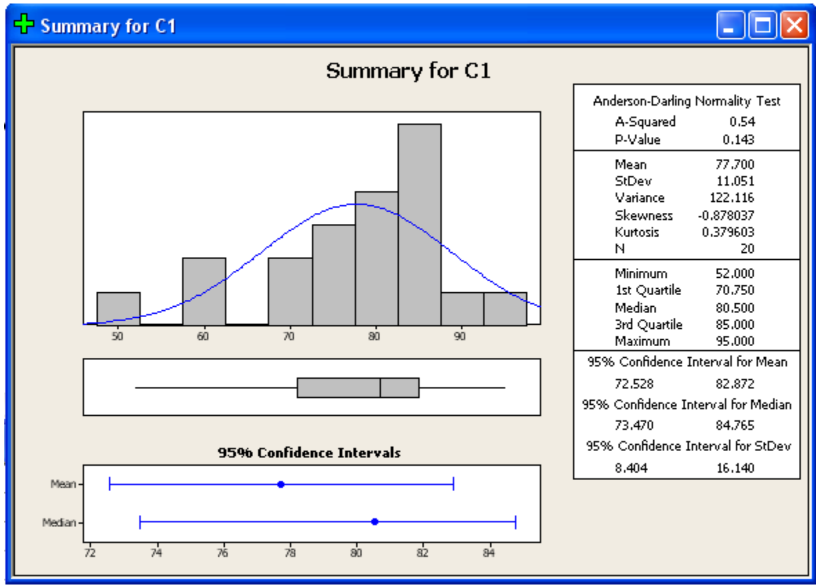
Variable	N	StDev	Variance
Edad	20	11.1	122

95% Confidence Intervals

Variable	Method	CI for StDev	CI for Variance
EdaD	Standard	(8.4; 16.1)	(71; 261)
	Adjusted	(8.2; 16.8)	(68; 282)

Ejemplo (Cont.)

Stat>Basic Statistics> Graphical Summary



Interpretación: Un intervalo de confianza del 95% para la desviacion estandar es de la forma (8.4039, 16.1402). Si se cuadra ambos valores se obtiene el intervalo de confianza para la varianza, y se concluye de que hay un 95% de confianza de que la varianza de las edades de todas las personas que mueren por enfermedad en el pueblo cae entre 70.6253 y 260.507.

Prueba de Hipótesis para la Varianza Poblacional

Asumiendo que la población de donde se extrae la muestra se distribuye normalmente se pueden hacer las siguientes hipótesis acerca de la varianza poblacional:

Caso I	**Caso II**	**Caso III**
Ho : $\sigma^2 = \sigma_0^2$	Ho : $\sigma^2 = \sigma_0^2$	Ho : $\sigma^2 = \sigma_0^2$
Ha : $\sigma^2 < \sigma_0^2$	Ha : $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	Ha : $\sigma^2 > \sigma_0^2$

Prueba Estadística:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$ con n-1 g.l

Decisión:

Si $\chi^2_{cal} < \chi^2_{\alpha}$ entonces se rechaza Ho

Si $\chi^2_{cal} < \chi^2_{\alpha/2}$ ó $\chi^2_{cal} > \chi^2_{1-\alpha/2}$ se rechaza Ho

Si $\chi^2_{cal} > \chi^2_{1-\alpha}$ se rechaza Ho

Ejemplo 7.10

Ejemplo 7.10. Usando los datos del ejemplo anterior, probar si hay suficiente evidencia para concluir que la varianza poblacional sea mayor que 100. Usar un nivel de significación del 5 por ciento.

Solución:

Se desea probar:

Ho : $\sigma^2 = 100$

Ha : $\sigma^2 > 100$

El valor de la prueba estadística será (19)(122.116)/100 = 23.2020 que comparado con = 30.1435 resulta ser menor. Luego, no hay evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula. Al 5 % de significación, la varianza poblacional no parece ser mayor que 100.

Ejemplo 7.10 (cont)

En MINITAB, se sigue la secuencia **STAT>Basic Statistics> 1 Variance,** Luego se elige **Enter Variance** en la primera ventanita y se elige la opcion **Perform Hypothesis test** y entra el valor deseado en la ventanita **Hypothized variance .** Luego se oprime el boton **options**. En la ventanita que aparece se elige la opcion **greater than** en **Alternative**

Null hypothesis Sigma-squared = 100

Alternative hypothesis Sigma-squared > 100

Tests

Variable	Method	Chi-Square	DF	P-Value
Plasma	Standard	23.20	19.00	0.229

Comentario. No se rechaza la hipotesis Nula porque el P-value es mayor que .05.

7.5. Comparando la varianza de dos poblaciones

Supongamos que se tienen dos poblaciones normales con varianzas desconocidas σ_1^2 y σ_2^2

Si de la primera población se toma una muestra de tamaño *m* que tiene una varianza muestral s_1^2 y de la segunda población se toma una muestra, independiente de la primera, de tamaño *n* que tiene una varianza muestral s_2^2

Se puede mostrar que la razón

$$\frac{s_1^2 / \sigma_1^2}{s_2^2 / \sigma_2^2}$$

se distribuye como una F con *m*-1 grados de libertad en el numerador y *n*-1 en el denominador.

Caso I

Ho : $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Ha : $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$

Caso II

Ho : $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Ha : $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Caso III

Ho : $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Ha : $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$

Prueba Estadística:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

con *m*-1 g.l. en el numerador y *n*-1 g.l en el denominador

Decisión:

Si $F_{cal} < F_{\alpha}$ entonces se rechaza Ho

Si $F_{cal} < F_{\alpha/2}$ o Fcal $> F_{1-\alpha/2}$ se rechaza Ho

Si $F_{cal} > F_{1-\alpha}$ entonces se rechaza Ho

MINITAB hace pruebas de igualdad de varianza de dos o más grupos. Para esto se selecciona la opción **2 Variances** del submenú **Basic Statistics** del menú **STAT.** Otra posibilidad es elegir **Test for Equal Variances** del submenú **ANOVA** del menú **STAT.**

Ejemplo 7.11 En el siguiente ejemplo se trata de comparar las varianzas de los puntajes de aprovechamiento matematico en el examen del College Board, de los estudiantes deescuelas públicas y privadas. Los datos recolectados son:

Est	aprovech	escuela
1	580	pública
2	638	pública
3	642	privada
4	704	pública
5	767	privada
6	641	privada
7	721	privada
8	625	privada
9	694	pública
10	615	pública
11	617	pública
12	623	pública
13	689	privada
14	689	pública

Resultados

Ho: Varianza de los puntajes de estudiantes de escuela pública es igual a la varianza de puntajes de los estudiantes de escuela privada.

Ha: Las varianzas no son iguales.

Test for Equal Variances: aprovech versus escuela

95% Bonferroni confidence intervals for standard deviations

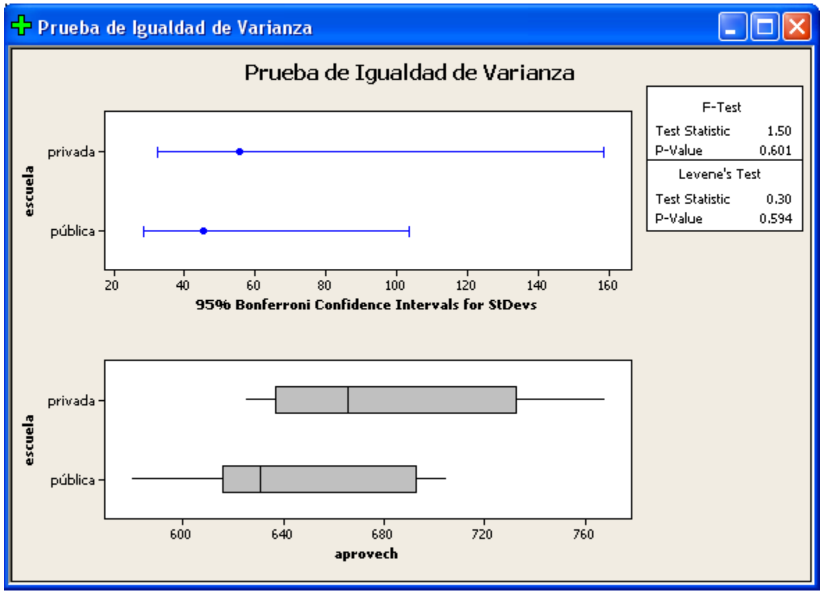
escuela	N	Lower	StDev	Upper
privada	6	32.4522	55.3477	158.347
pública	8	28.2368	45.1347	103.380

F-Test (normal distribution)

Test statistic = 1.50, p-value = 0.601

Levene's Test (any continuous distribution)

Test statistic = 0.30, p-value = 0.594



Interpretación: El "P-value" de la prueba de F es .601 mucho mayor que .05, luego se acepta la hipótesis nula y se concluye que los puntajes en la prueba de aprovechamiento en las escuelas pública y privada tienen igual varianza. De las gráficas se puede ver que los "boxplots" de ambos grupos tienen aproximadamente el mismo alargamiento.

7.6 Comparación entre dos medias poblacionales usando muestras independientes

Supongamos que se tienen dos poblaciones distribuidas normalmente con medias desconocidas μ_1 y μ_2, respectivamente. Se puede aplicar una prueba *t de Student* para comparar las medias de dichas poblaciones basándonos en dos muestras independientes tomadas de ellas.

a) Si las varianzas de las poblaciones son iguales ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$) entonces se puede mostrar que:

$$t = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_p \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}$$

se distribuye como una *t* con $m + n - 2$ grados de libertad.

la varianza poblacional es estimada por una varianza combinada de las varianzas de las dos muestras tomadas.

$$s_p^2 = \frac{(m-1)s_1^2 + (n-1)s_2^2}{m+n-2}$$

Un intervalo de confianza del 100(1-α) % para la diferencia μ_1-μ_2 de las medias poblacionales será de la forma:

$$\bar{x} - \bar{y} \pm t_{(\alpha/2, n+m-2)} s_p \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$$

Las pruebas de hipótesis son:

Caso I

Ho : $\mu_1 = \mu_2$

Ha : $\mu_1 < \mu_2$

Caso II

Ho : $\mu_1 = \mu_2$

Ha : $\mu_1 \neq \mu_2$

Caso III

Ho : $\mu_1 = \mu_2$

Ha : $\mu_1 > \mu_2$

Prueba Estadística:

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_p \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}$$ con *m*+*n*-2 grados de libertad

Decisión:

Si $t_{cal} < -t_{\alpha}$ entonces se rechaza Ho

Si $t_{cal} < t_{\alpha/2}$ o $t_{cal} > t_{1-\alpha/2}$ se rechaza Ho

Si $t_{cal} > t_{1-\alpha}$ se rechaza Ho

Ejemplo

Ejemplo 7.13. Se desea comparar si los estudiantes de escuelas privadas y públicas tienen igual rendimiento en la prueba de aprovechamiento matemático del College Board. Los datos aparecen en el Ejemplo 7.11.

Solucion

Two-Sample T-Test and CI: aprovech, escuela

Two-sample T for aprovech

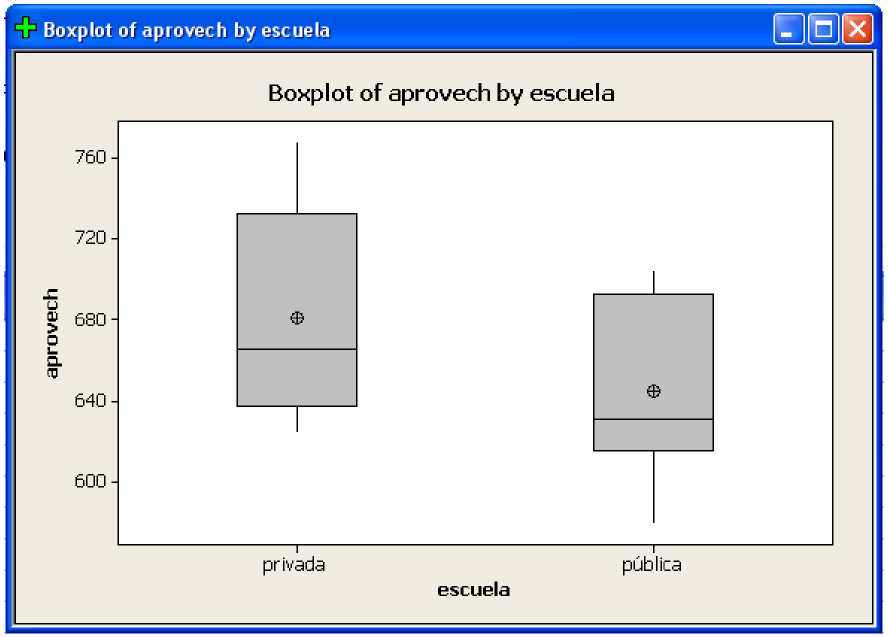
escuela	N	Mean	StDev	SE Mean
privada	6	680.8	55.3	23
pública	8	645.0	45.1	16

Difference = mu (privada) - mu (pública)
Estimate for difference: 35.8333
95% CI for difference: (-22.5849, 94.2516)
T-Test of difference = 0 (vs not =): T-Value = 1.34 P-Value = 0.206 DF = 12
Both use Pooled StDev = 49.6461

La opción **Samples in different columns** se usa cuando las dos muestras están en columnas separadas y se considera a opción **Assume equal variances.**

Interpretación: El valor del "P-value" es .206 mayor que el nivel de significación α = .05, por lo tanto NO se rechaza la hipótesis nula y se concluye de que no hay evidencia de que los estudiantes de escuela pública tengan un rendimiento distinto que los de escuela privada en las pruebas de aprovechamiento. El número de grados de libertad de la t es 12. Notar que el intervalo de confianza del 95% para la diferencia es (–22.6, 94.3) que contiene a cero, ésta es otra manera de justificar que se acepta la hipótesis nula.

Eligiendo la opción **Graphs** de la ventana de diálogo **2-Sample t** se obtiene los boxplots de los dos grupos, como aparece en la siguiente figura:



Interpretación: No se puede apreciar una marcada diferencia entre las medianas (representadas por las líneas dentro de las cajas), ni las medias (representadas por los puntos) de los grupos. La variabilidad de los dos grupos también es bastante similar ya que los dos "boxplots" tienen alargamiento similar.

b) Si las varianzas de las poblaciones no son iguales, entonces se usa una prueba aproximada de *t*, donde el número de grados de libertad es calculado aproximadamente.

La prueba de *t* aproximada está dada por:

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{s_1^2}{m} + \frac{s_2^2}{n}}}$$

donde los grados de libertad *gl* son aproximados por la siguiente fórmula:

$$gl = \frac{(c_1 + c_2)^2}{\frac{c_1^2}{m-1} + \frac{c_2^2}{n-1}}$$

Con $c_1 = \frac{s_1^2}{m}$ y $c_2 = \frac{s_2^2}{n}$

Ejemplo

Ejemplo 7.14. Usando los datos del Ejemplo 7.12 (el conjunto de datos se llama **gpasex)**, probar si las estudiantes mujeres tienen mejor promedio académico que los varones.

Two-Sample T-Test and CI: mujer, hombre

Two-sample T for mujer vs hombre

	N	Mean	StDev	SE Mean
mujer	16	3.249	0.359	0.090
hombre	12	2.954	0.631	0.18

Difference = mu (mujer) - mu (hombre)
Estimate for difference: 0.295208
95% lower bound for difference: -0.059554
T-Test of difference = 0 (vs >): T-Value = 1.45 P-Value = 0.083 DF = 16

Interpretación: Como el "P-value" es .083 > .05 aunque no por mucho, se concluye que no hay suficiente evidencia de que el promedio académico de las mujeres sea mayor que el de los hombres.

Two-Sample T-Test and CI: gpa, sexo

Two-sample T for gpa

sexo	N	Mean	StDev	SE Mean
hombre	12	2.954	0.631	0.18
mujer	16	3.249	0.359	0.090

Difference = mu (hombre) - mu (mujer)
Estimate for difference: -0.295208
95% lower bound for difference: -0.649971
T-Test of difference = 0 (vs >): T-Value = -1.45 P-Value = 0.917 DF = 16

Comparando media de dos poblaciones usando muestras pareadas

En este caso se trata de comparar dos métodos o tratamientos, pero se quiere que las unidades experimentales (sujetos) donde se aplican los tratamientos sean las mismas, ó lo más parecidas posibles, para evitar influencia de otros factores en la comparación

Sea X_i el valor antes del tratamiento y Y_i el valor despues del tratamiento en el *i-ésimo* sujeto. Consideremos $d_i = X_i - Y_i$ la diferencia antes-despues del tratamiento en el *i-ésimo* sujeto.

Las inferencias que se hacen son acerca del promedio poblacional μ_d de las d_i. Si $\mu_d = 0$, entonces significa que no hay diferencia entre los dos tratamientos.

En **MINITAB** eligiendo la secuencia **Stat** ▸ **Basic Statistics** ▸ **paired t**

Intervalo de Confianza

Un intervalo de confianza del 100(1-α)% para la diferencia poblacional μ_d dada una muestra de tamaño *n* es de la forma

$$(\bar{d} - t(n\text{-}1,\alpha/2)\ \ \text{sd}/\sqrt{n}\ ,\ \bar{d} + t(n\text{-}1,\alpha/2)\ \ \text{sd}/\sqrt{n}\ )$$

donde $\bar{d}$, es media de las diferencias muestrales d_i y $s_d = \sqrt{\dfrac{\sum_i (d_i - \bar{d})^2}{n-1}}$ es la desviación estándar.

Pruebas de Hipótesis

Caso I
Ho : $\mu_d = 0$
Ha : $\mu_d < 0$

Caso II
Ho : $\mu_d = 0$
Ha : $\mu_d \neq 0$

Caso III
Ho : $\mu_{d} = 0$
Ha : $\mu_d > 0$

Prueba Estadística:

$t = \dfrac{\bar{d}}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}}$ se distribuye con una t de Student con n-1 *gl*.

Decisión:

Si $t < -t\alpha$ entonces se rechaza Ho

Si $| t | > t\alpha/2$ entonces se rechaza Ho

Si Tcal $> t\alpha$ entonces se rechaza Ho

Ejemplo 7.15

Un médico desea investigar si una droga tiene el efecto de bajar la presión sanguínea en los usuarios. El médico eligió al azar 15 pacientes mujeres y les tomó la presión, luego les recetó la medicina por un período de 6 meses, y al final del mismo nuevamente les tomó la presión. Los resultados son como siguen:

Sujetos															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Antes	70	80	72	76	76	76	72	78	82	64	74	92	74	68	84
Después	68	72	62	70	58	66	68	52	64	72	74	60	74	72	74

Solución:

Sea μ_d que representa la media poblacional de las diferencias. Luego:

H_o: $\mu_d = 0$ (La droga no tiene ningún efecto)

H_a: $\mu_d > 0$ (La droga tiene efecto, la presión antes de usar la droga era mayor que después de usarla).

Ejemplo (Cont.)

Paired T-Test and Confidence Interval

Paired T for Antes – Después

	N	Mean	StDev	SE Mean
Antes	15	75.87	6.86	1.77
Después	15	67.07	6.67	1.72
Difference	15	8.80	10.98	2.83

95% CI for mean difference:(2.72, 14.88)

T-Test of mean difference = 0 (vs > 0): T-Value = 3.11 P-Value = 0.004

Interpretación: Notando que el "P-value" es .004 menor que .05, se rechaza la hipótesis nula y se llega a la conclusión de que, efectivamente la droga reduce la presión sanguínea. Por otro lado, se puede observar que el intervalo de confianza del 95% para la diferencia de medias es (2.72, 14.88), el cual no contiene a cero, ésta es otra razón para rechazar la hipótesis nula.

Comparando dos proporciones

Algunas veces se desea comparar la proporción con que ocurre un mismo evento en dos poblaciones distintas. Esto conlleva a hacer inferencias acerca de la diferencia p_1 - p_2. Supongamos que de una de las poblaciones sacamos una muestra de tamaño *m*, y que en ella ocurre el evento X_1 veces, y de la segunda población sacamos una muestra de tamaño *n* y que en ella ocurre el evento X_2 veces.

Se puede mostrar que el siguiente estadístico:

$$z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{m} + \frac{p_2 q_2}{n}}}$$

Donde $\hat{p}_1 = \frac{X_1}{m}$, $\hat{p}_2 = \frac{X_2}{n}$, $q_1 = 1-p_1$ y $q_2 = 1-p_2$ se distribuye aproximadamente como una normal estándar cuando *n* y *m* son grandes tal que, $m\hat{p}_1$ y $n\hat{p}_2$ son mayores que 5.

Un intervalo de confianza

Un intervalo de confianza aproximado del 100(1-α) para la diferencia de las proporciones será de la forma:

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{m} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n}}$$

Si la hipótesis nula H_o: $p_1 = p_2$ es cierta, entonces el estadístico mencionado anteriormente se convierte en:

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{pq\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}}$$

donde, *p* es estimado por $\bar{p} = \frac{X_1 + X_2}{m+n}$. Luego, las fórmulas para pruebas de hipótesis serán como siguen:

Caso I

$H_o: p_1 = p_2$

$H_a: p_1 < p_2$

Caso II

$H_o: p_1 = p_2$

$H_a: p_1 \neq p_2$

Caso III

$H_o: p_1 = p_2$

$H_a: p_1 > p_2$

Prueba Estadística:

$$Z = \frac{\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2}{\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}}$$

Decisión:

Si $Z_{cal} < z_{\alpha}$ entonces se rechaza Ho

Si $z_{cal} < z_{\alpha/2}$ o $z_{cal} > z_{1-\alpha/2}$ entonces se rechaza Ho

Si $z_{cal} > z_{1-\alpha}$ entonces se rechaza Ho

En **MINITAB**, para hacer inferencia acerca de la diferencia de dos proporciones se sigue la secuencia **Stat** ▸ **Basic Statistics** ▸ **2 proportions.**

Ejemplo 7.16

Un médico ha sugerido que un ataque cardíaco es menos probable que ocurra en hombres que practican alguna clase de deporte. Se elige una muestra al azar de 300 hombres, de los cuales 100 practican alguna clase de deporte y de ellos sólo 10 han sufrido un ataque cardíaco. De los 200 que no practican deportes, 25 han sufrido ataques cardíacos. Probar si los resultados de las muestras apoyan lo sugerido por el médico.

Solución:

La hipótesis nula es

H_o: $p_1 = p_2$ (las probabilidades de sufrir ataque cardíaco son iguales para ambos grupos) y

Ha: $p1 < p2$ (la probabilidad de sufrir ataque cardíaco es menor en hombres deportistas).

Test and CI for Two Proportions

Sample	X	N	Sample p
1	10	100	0.100000
2	25	200	0.125000

Difference = p (1) - p (2)
Estimate for difference: -0.025
95% upper bound for difference: 0.0375666
Test for difference = 0 (vs < 0): Z = -0.64 P-Value = 0.262

Interpretación: En los resultados aparece el estimado de la diferencia de las dos proporciones, el intervalo de confianza del 95% para dicha diferencia, la prueba estadística para igualdad de proporciones y su “p-value”. Viendo que el “P-value” = .262 es mucho mayor que .05 se concluye que no hay evidencia suficiente para afirmar que la probabilidad de sufrir un ataque cardiaco entre los hombres deportistas es menor que de la de los hombres que no practican deportes. Notar que el intervalo de confianza contiene a cero, lo cual es otra razón para aceptar la hipótesis nula.

Ejemplo 7.17

Un profesor piensa que el porcentaje de estudiantes admitidos a la Universidad durante el presente año es mayor para los solicitantes de escuela privada que para los que vienen de escuela pública. El basa su afirmación en una muestra de 30 solicitantes tomadas al azar. Los datos están en el archivo **comp2pr**. ¿Habrá suficiente evidencia para apoyar la afirmación del profesor?

Solución:
Sea p_h la proporción de estudiantes admitidos entre todos los solicitantes de escuela privada y p_e la proporción de estudiantes admitidos entre todas las solicitudes de escuela pública. Entonces, las hipótesis nula y alterna serán:

$H_0 : p_h = p_e$ (o también $p_h - p_e = 0$)

$H_a : p_h > p_e$ (o también $p_h - p_e > 0$)

Test and CI for Two Proportions: admision, escuela

Event = si

escuela	X	N	Sample p
priv	13	17	0.764706
publ	5	13	0.384615

Difference = p (priv) - p (publ)

Estimate for difference: 0.380090

95% lower bound for difference: 0.100994

Test for difference = 0 (vs > 0): Z = 2.11 P-Value = 0.018

* NOTE * The normal approximation may be inaccurate for small samples.

Fisher's exact test: P-Value = 0.061

Interpretación: Como el "P-value" = .0018 es menor que .05 se rechaza la hipótesis nula y se concluye que hay evidencia para apoyar lo que afirma el profesor, el porcentaje de estudiantes solicitantes de escuela privada que son admitidos es mayor que el de las escuelas públicas. Notar que el intervalo de confianza para la diferencia de proporciones no contiene a CERO, ésta es otra razón para rechazar la hipótesis nula.