Apéndice A. Repaso de Matrices

1.-Definición: Una matriz es una arreglo rectangular de números reales dispuestos en filas y columnas.
Una matriz com m filas y n columnas se dice que es de orden m x n de la matriz. Cuando m=n la matriz es llamada matriz cuadrada. Una matriz usualmente es denotada por una letra mayúscula y un elemento cualquiera de ella es llamado una entrada de la matriz. Así A=(a_{ij}) representa a la matriz A y a_{ij} es la entrada en la fila i columna j.

Ejemplo 1: La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 0.5 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 11 \end{bmatrix}$$

La entrada a_{21}=0.5 y la entrada a_{32}=6.

Cuando la matriz tiene una sola columna es llamado un **vector columna** y si la matriz tiene una sola fila es llamado un **vector fila**. Así una matriz de orden mxn se puede descomponer en m vectores filas o n vectores columnas. El número de elementos del vector es llamada la **dimension** del vector.

Ejemplo 2. Escribir un vector fila y un vector columna de la matriz A

Solución:

$$\mathbf{a}=[2\ 6\ 11] \quad \text{y} \quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Los elementos de un vector solo tienen un subíndice el cual indica su posición.

2.- Operaciones con matrices:

Se pueden sumar y restar matrices siempre que éstas sean del mismo orden. Para obtener la matriz suma (resta) simplemente se suman y restan las entradas correspondientes.
O sea, A+B=(a_{ij}+b_{ij}).

Multiplicación de dos vectores. El producto (interno o escalar) de dos vectores de igual dimension se obtiene sumando los productos de sus correspondientes elementos. Más especificamente, si **a**=(a_1,…..a_n) y **b**=(b_1….b_n) entonces **ab**=a_1b_1+…..+$a_n$bn

Notar que la multiplicación de dos vectores produce un número y no un vector.

Ejemplo 3. Hallar el producto de los vectores **a** y **b** del ejemplo 2.

Solución: **ab**=(2)(4)+(6)(5)+(11)(6)=8+30+66=104.

Multiplicación de matrices. Para que dos matrices se puedan multiplicar el número de columnas de la primera debe coincidir con el numero de filas de la segunda. Así una matriz de orden 5x3 se puede multiplicar con una matriz de orden 3x4, pero no con una matriz 4x4.
Sea A de orden mxn y B de orden nxq entonces el producto AB=C en donde C es una matriz mxq cuya entrada en la posición (i,j) se obtiene multiplicando la i-ésima fila de A con la j-ésima columna de B.
Se debe notar que AB≠BA

Ejemplo 4. Calcular AB si A es la matriz del ejemplo 1 y $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

Solución:

$$C=AB=\begin{bmatrix} 54 & 48 \\ 45.5 & 43 \\ 69 & 62 \end{bmatrix}$$

Por ejemplo la entrada c_{21}=45.5 se obtuvo multiplicado el vector $\mathbf{a_2}$=[0.5 5 7] con $\mathbf{b_1}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Nota: La división por matrices no está definida

Transpuesta de una matriz: La transpuesta de una matriz se obtiene intercambiando sus filas por sus columnas. La transpuesta de la matriz A se representa por A'.

Ejemplo 5. Hallar la transpuesta de la matriz B

Solución

$$B'=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

La transpuesta de un vector columna da un vector fila. Para ser compatible cpn el producto de matrices, el producto de dos vectores (columnas) **a** y **b** de igual dimension es representado más adecuadamente por **a'b.**

Propiedades.

i) (A+B)’=A’+B’
ii) (AB)’=B’A’

Ejemplo 6. Verificar la propiedad (ii) usando R y las matrices

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 9 \\ 5 & 12 \end{bmatrix} \text{ y } C=\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Solución:

```
> A<-c(3,4,5,8,9,12)
> A<-matrix(A,3,2)
> A
     [,1] [,2]
[1,]    3    8
[2,]    4    9
[3,]    5   12
> # Hallando la transpuesta de A
> B<-t(A)
> B
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    3    4    5
[2,]    8    9   12
> C<-c(5,3,1,7)
> C<-matrix(C,2,2)
> C
     [,1] [,2]
[1,]    5    1
[2,]    3    7
> #Multiplicando A por C
> A%*%C
     [,1] [,2]
[1,]   39   59
[2,]   47   67
[3,]   61   89
> # Calculando transpuesta de A por C
> t(A%*%C)
     [,1] [,2] [,3]
[1,]   39   47   61
[2,]   59   67   89
> #Multiplicando C' por A'
> t(C)%*%t(A)
     [,1] [,2] [,3]
[1,]   39   47   61
```

[2,] 59 67 89

3. Norma (euclideana) de un Vector. Dado el vector n –dimensional **a**=(a_1,…a_n) entonces su norma euclideana se define por

$$||\mathbf{a}||=\sqrt{a_1^2+....+a_n^2}=\sqrt{\mathbf{a'a}}$$

En general si p es un número real mayor o igual que uno se define la norma p del vector a por

$$||a||_p=(|a_1|^p+|a_2|^p+....+|a_n|^p)^{1/p}$$

Si p=1 se obtiene la norma Manhattan y si p=∞ se obtiene la norma Chevyschev.

4. Normas de matrices: Dada una matriz A de orden m x n, y una norma vectorial ||.|| se define la norma p de una matriz por

$$||A||_p=\max_{x\neq 0}\frac{||\mathbf{Ax}||_p}{||\mathbf{x}||_p}$$

En particular, para p=1 se obtiene $||A||_1=\max(\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|)$, la mayor de la suma de las columnas, para p=∞ se obtiene $||A||_1=\max(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|)$, la mayor de la suma de las filas.

Para p=2, se obtiene,

$$||A||_2=\max_{x\neq 0}\sqrt{\frac{\mathbf{x'A'Ax}}{\mathbf{x'x}}}=(\text{mayor eigenvalue de A'A})^{1/2}$$

También es bastante usada la norma de Frobenius.

5. Matriz Identidad. Es una matriz cuadrada cuyos elementos de su diagonal son todos unos y los que no estan en la diagonal son todos ceros. La matriz identidad de orden n se denota por I_n. Por ejemplo,

$$I_4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Propiedad: Si A es de orden mxn entonces $AI_n=A$ y $I_mA=A$.

6. Inversa de una matriz. La inversa de una matriz cuadrada A se representa por A^{-1} y es tal que $AA^{-1}=A^{-1}A=I$. Existen varios métodos de calcular inversas de matrices. El comando **solve** de R calcula la inversa de una matriz.

Ejemplo 7. Calcular usando R la inversa de la matriz A del ejemplo 1 y verificarla.

```
> A
     x1 x2 x3
[1,] 1.0  4  9
[2,] 0.5  5  7
[3,] 2.0  6 11
> inva<- solve(A)
>inva
       [,1]    [,2]     [,3]
x1 -0.81250 -0.6250  1.06250
x2 -0.53125  0.4375  0.15625
x3  0.43750 -0.1250 -0.18750
> inva%*%A

              x1           x2            x3
 x1  1.000000e+00 2.220446e-15  4.218847e-15
 x2 -2.775558e-16 1.000000e+00 -1.471046e-15
 x3  1.665335e-16 6.106227e-16  1.000000e+00

> A%*%inva

              [,1]         [,2]         [,3]
 [1,]  1.000000e+00 3.053113e-16 8.049117e-16
 [2,] -2.775558e-16 1.000000e+00 8.326673e-17
 [3,] -5.551115e-17 4.718448e-16 1.000000e+00
>
```

Propiedad: Si A y B son dos matrices cuadradas entonces

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

7. Traza de una matriz. Si A es una matriz cuadrada entonces su traza es la suma de los elementos que están en su diagonal.

Ejemplo 8. La traza de la matriz A del ejemplo 1 es 1+5+11=17.

Propiedades.

(i) tr(A+B)=tr(A)+tr(B)
(ii) tr(AB)=tr(BA) siempre que AB y BA puedan efectuarse.

8. Rango de una matriz. Indica el número de columnas (o filas) independientes que tiene una matriz. Algunas veces ocurre que una columna (o fila) de una matriz es una combinación lineal de las otras columnas o fila. Si el rango de la matriz es igual al número de columnas entonces se dice que la matriz es de rango completo.

Propiedad Una matriz cuadrada de rango completo tiene inversa.

9. Matriz Simétrica. Una matriz cuadrada A es simétrica si es igual a su transpuesta. Es decir, al intercambiar filas por columnas se obtiene la misma matriz.

Por ejemplo, la matriz M= $\begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 7 & 4 & 9 \\ 5 & 9 & 2 \end{bmatrix}$ es simétrica. La matriz P=M'M también es simétrica

Propiedad. Si una matriz A es simétrica entonce también lo es su inversa A^{-1}. O sea, si A es simétrica $(A^{-1})'=A^{-1}$.

10. Determinante de una matriz cuadrada.

El determinante de una matriz cuadrada A consiste de la suma de ciertos productos de los elementos de A, cada uno de los productos es multiplicado por +1 o –1 de acuerdo a ciertas reglas. El determinante de la matriz A se representa por |A| o det(A).

Ejemplo 9. El determinante de la matriz A de orden 2x2 est'a dado por

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Si una matriz tiene determinante cero se dice que es sngular.

Propiedades
i) Si una matriz es singular entonces no tiene inversa
ii) $|AB|=|A||B|$
iii) $|A^{-1}|=1/|A|$

11. Matriz Idempotente. Una matriz A es idempotente si es simétrica y si $A^2=A$

12. Matriz Triangular. Si los elementos debajo de la diagonal de la matriz son todos ceros entonces se dice que es del tipo triangular superior y si los elementos por encima de la diagonal son todos ceros entonces es llamada matriz triangular inferior. Sistemas de ecuaciones lineales asociados con matrices triangulares son fáciles de resolver.
El determinante de una matriz triangular es el producto de los elemntos que están en su diagonal

13. Matriz Ortogonal. Una matriz A cuyos vectores columnas son de norma uno y ortogonales (es decir su producto interno da 0) es llamaa una matriz orthogonal. Si una matriz cuadrada A es orthogonal entonces A'A=A'A=I, o equivalentemente A^{-1}=A'.

El determinante de una matriz orthogonal es +1 o –1.

14. Forma Cuadrática. Dado un vector columna **z** de dimension n y una matriz cuadrada A de dimension n x n. Entonces,

$$\mathbf{z'}\,\mathbf{Az} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} z_i^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij} z_i z_j$$

es llamada una forma cuadrática en **z** con matriz A. Notar que la forma cuadrática es un escalar. Se dice que la matriz A es definida positiva si **z'Az>0** para todo $\mathbf{z}^1\ \mathbf{0}$ y es semi definida positive si **z'Az=0** para todo z, pero **z'Az=0** para algún $\mathbf{z}^1\ \mathbf{0}$.

15. **Valores propios y Vectores propios.** Sea A una matriz de orden n x n. Los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de la matriz A se obtiene resolviendo la ecuación

$$|A-\lambda\mathbf{I}|=0$$

Asociado con el i-ésimo valor propio λ_i, hay un vector $\mathbf{v_i}$ que resulta de resolver

$$(A-\lambda_i\mathbf{I})\mathbf{v}_i=\mathbf{0}$$

Propiedades:

a) Si la matriz A es simétrica entonces todos sus valores propios serán reales.
b) Traza(A)= $\sum_{i=1}^{n} l_i$
c) Si V es una matriz cuyas columnas son los vectores propios de A entonces se cumple que **V'AV**=diag($\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$).

16. La descomposición de una matriz en valores singulares (SVD). Sea A una matriz real de dimension m por n. Existen matrices ortogonales U de orden m por m y V de orden n por n tales que:

V'A U=diag($\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_p$) con p=min(m,n) y donde
$\sigma_1=\sigma_2=\ldots=\sigma_p=0$ son llamados los valores singulares de A.

Propiedad: Los valores propios de la matriz A'A son los cuadrados de los valores singulares de A.